PITAGORAS
ACADEMIA

ARITMÉTICA

Profesor
Fortunato Mendoza

CUATRO OPERACIONES Y DIVISIBILIDADD

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS

01. Si la siguiente suma

$$1 + 8 + 21 + 40 + 65 + 96 + \ldots$$

Tiene 20 términos. Dar como respuesta, la suma de cifras del resultado.

A) 18 B) 30 C) 36

D) 40 E) 45

$n=1 \rightarrow S_1 = 1$

$n=2 \rightarrow S_2 = 9$

$n=3 \rightarrow S_3 = 30$

Resolución:

Sea $S = 1 + 8 + 21 + 40 + 65 + 96 + \ldots$

$7 \quad 13 \quad 19 \quad 25 \quad 31$

$6 \quad 6 \quad 6 \quad 6$

Es una serie de 2do orden

Suma de los "n" primeros términos

$$S_n = 1 \cdot \frac{n}{1!} + 7\frac{n(n-1)}{2!} + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

Para $n=20$

$$S_{20} = 1 \cdot \frac{20}{1} + 7 \cdot \frac{20(19)}{2} + 6 \times \frac{20(19)(18)}{6}$$

$$S_{20} = 20 + 1330 + 6840$$

$$S_{20} = 8190 \rightarrow \Sigma cfs = 18$$

03. Se tiene la siguiente pirámide

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

.

.

.

Calcule la suma de las cifras de la suma de los términos de la fila 32.

A) 23 B) 24 C) 25

D) 26 E) 27

Resolución:

1°F 1 $\rightarrow \Sigma = 1 = 1^3$

2°F 3 5 $\rightarrow \Sigma = 8 = 2^3$

3°F 7 9 11 $\rightarrow \Sigma = 27 = 3^3$

4°F 13 15 17 19 $\rightarrow \Sigma = 64 = 4^3$

⋮ ⋮

32°F $\rightarrow \Sigma = \quad = 32^3$

Luego $\Sigma_{32°F} = 32^3 = 32768$

Σ cifras $= 26$

05. Si $\overline{abc}_x - \overline{cba}_x = \overline{pqr}_x$

y $\overline{pqr}_x + \overline{rqp}_x = \overline{abcd}_x$

El valor de (a + b + c + d) es

A) 3x B) 2x C) 2x+2

D) 2x-2 E) 18

Resolución:

$\overline{abc}_x - \overline{cba}_x = \overline{pqr}_x$ ---(1)

$\overline{pqr}_x + \overline{rqp}_x = \overline{abcd}_x$ --(2)

De (1) $q = x-1$; $p+r = x-1$

De (2)

$$\begin{array}{r} 1 \\ p\ q\ r \\ r\ q\ p \\ \hline 1\,0\,(x-2)(x-1) \end{array}_x$$

1er orden $\Sigma = x-1$

2do orden $\Sigma = 2x-2 = x + x-2$

$\Sigma = \overline{1(x-2)}_x$

↳ se lleva

3er orden $\Sigma = x = 10_x$

Piden

$a+b+c+d = 1+0+x-2+x-1 = 2x-2$

07. Al multiplicar el entero positivo N por un capicúa de 4 cifras, el primer y último producto parcial tienen por producto 10609, mientras que los otros productos parciales suman 1442. Los productos parciales del capicúa por N suman:

A) 5226 B) 6188 C) 7084

D) 8116 E) 1648

Resolución:

Sea N y $\overline{abba}$

× $(aN)(aN) = 10609 \rightarrow aN = 103$

× $bN + bN = 1442 \rightarrow bN = 721$

Piden

$$aN + bN + bN + aN = 2aN + 2bN$$
$$= 2(aN + bN)$$
$$= 2(824)$$
$$= 1648$$

09. Si $\overline{TRES} \times E = \overline{DOCE}$, siendo E = 3 y O diferente de cero. Calcular el valor de (D + O), sabiendo que letras diferentes representan cifras diferentes.

A) 9 B) 11 C) 12

D) 13 E) 15

Resolución:

$T \neq R \neq E \neq S \neq D \neq O \neq C$; $O \neq$ cero

$E = 3 \rightarrow S = 1$

En columna

$$\begin{array}{r} \overset{1}{T\ R\ 3\ 1} \times \\ 3 \\ \hline D\ O\ C\ 3 \end{array} \rightarrow C = 9$$

Obs $T < 3 \rightarrow T = 2$

Obs $R = 6 \rightarrow O = 8$; $D = 7$

Piden $D + O = 7 + 8 = 15$

11. Al dividir los enteros N entre $-\overline{xy}$, la diferencia entre los restos por defecto y exceso respectivos es 13 y el producto de éstos es 510. Por otro lado el cociente por exceso sumado con el resto por defecto resulta 27. Calcular el resto por exceso al dividir $-\overline{xy}$ entre la suma de cifras de N.

A) 6 B) 5 C) 4

D) 3 E) 2

Cuando $d \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow r + r_e = d$

En general: $r + r_e = |d|$

Cuando $d \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow q_e = q + 1$

Cuando $d \in \mathbb{Z}^- \rightarrow q_e = q - 1$

Resolución:

Por defecto

$$\begin{array}{l|l} N & -\overline{xy} \\ \hline r & q \end{array}$$

Por exceso

$$\begin{array}{l|l} N & -\overline{xy} \\ \hline r_e & q_e \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} r - r_e = 13 \\ r \cdot r_e = 510 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} r = 30 \\ r_e = 17 \end{array}\right\rangle \quad 47 = |-\overline{xy}| \rightarrow \overline{xy} = 47$$

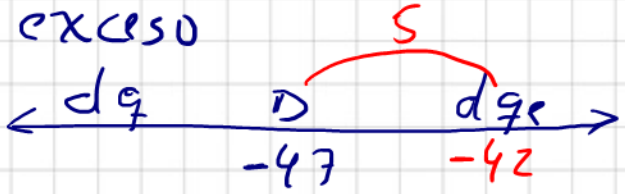
$* \; q_e + r = 27 \rightarrow q_e + 30 = 27 \rightarrow q_e = -3$

$q - 1 = -3 \rightarrow q = -2$

Luego $N = (-47)(-2) + 30 \rightarrow N = 124$

Dividiendo por exceso

$$\begin{array}{l|l} -47 & -7 \\ \hline 5 & -6 \end{array}$$



RPTA: 5

13. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda a las siguientes proposiciones:

I. En una división entera el residuo siempre es menor que el divisor.

II. La suma de los residuos por defecto y por exceso en una división entera, siempre es mayor que cero.

III. En toda división entera el cociente por exceso es mayor que el cociente por defecto.

A) VVV B) FVF C) FVV
D) VVF E) FFF

Resolución:

I (F)

Ejemplo $48 \underline{|-9}$ Obs $3 > -9$
$3 \quad -5$ $r > d$

II (V)

Propiedad: $r + re = |d|$; $d \neq 0$

$\rightarrow r + re > 0$

III (F)

Cuando $d \in \mathbb{Z}^-$ $\rightarrow q_e = q - 1 \rightarrow q_e < q$

RPTA: FVF

15. ¿Cuántos números naturales, cumplen:

I. Poseen 4 cifras al ser representados en el sistema octal.

II. Son números pares, pero no múltiplos de 4.

III. Al ser escritos en la base 3; sus 2 últimas cifras son: … 12?

A) 97 B) 98 C) 99

D) 100 E) 101

Resolución:

Sea N uno de los #s

* $N = \overline{abcd}_8$ --- (1)

* $N = \overset{\circ}{4}+2$

* $N = \ldots 12_{(3)} = \overset{\circ}{9}+12_{(3)} = \overset{\circ}{9}+5+9$

$= \overset{\circ}{4}+2+12$

$N = \overset{\circ}{36}+14$

$N = 36k+14$

De (1) $8^3 \leq N < 8^4$

$512 \leq N < 4096 \rightarrow 512 \leq 36k+14 < 4096$

$13{,}8 \leq k < 113{,}3$

$k = 14; 15; 16; ---; 113 \rightarrow 100$ valores

$\therefore$ RPTA: 100

17. Se tiene el menor número de cinco cifras del sistema de base ocho, que al expresarlo en la base cinco termina en $\overline{44}$ y al escribirlo en la base siete termina en $\overline{01}$; calcule la suma de cifras de dicho número.

A) 15 B) 20 C) 21
D) 22 E) 23

$$\begin{array}{r|l} 4999 & 8 \\ 7 & 624 \\ & 8 \\ 0 & 78 \\ & 8 \\ 6 & 9 \\ & 8 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Resolución:

Sea el # $N = \overline{abcde}$ (mínimo) ...(1)

$N = \ldots 44_{(5)} = 25 + 44_{(5)} = 25 + \boxed{24 + 75}$

$N = \ldots 01_{(7)} = 49 + 01_{(7)} = 49 + \boxed{1 + 98}$

Se cumple $N = 1225 + 99 \rightarrow N = 1225k + 99$ (min)

De (1) $8^4 \leq N < 8^5$

$4096 \leq 1225k + 99 < 32768$

$3,2 \leq k < 26,6$

Así $k_{min} = 4 \rightarrow N_{min} = 4999 \rightarrow$ en base 8

Luego $N_{min} = 11607_{(8)} \rightarrow$ Cifras $= 15$

19. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que $\overline{abcdefgh}$ sea divisible por 37?

A) $\overline{abc} + \overline{def} + \overline{gh} = \overset{o}{37}$

B) $\overline{ab} + \overline{cde} + \overline{fgh} = \overset{o}{37}$

C) $\overline{ab} + \overline{cde} + \overline{fgh} = 999$

D) $\overline{abc} + \overline{def} + \overline{gho} = \overset{o}{37}$

E) Ninguna de las anteriores

$10^3 = 1000 = \overset{o}{37} + 1 \Rightarrow 10^6 = \overset{o}{37} + 1$

Resolución:

Sea $\overline{abcdefgh} = \overset{o}{37}$

$\overline{ab} \cdot 10^6 + \overline{cde} \cdot 10^3 + \overline{fgh} = \overset{o}{37}$

$\overline{ab} \cdot (\overset{o}{37} + 1) + \overline{cde}\,(\overset{o}{37} + 1) + \overline{fgh} = \overset{o}{37}$

$\overline{ab} + \overline{cde} + \overline{fgh} = \overset{o}{37}$

Clave (B)

$1000 \;\underline{|37}$

$1 \quad 27$

21. Determine un número de la forma $\overline{9abbb}$ que sea múltiplo de 168. Dar como respuesta $(a+b)$

A) 4 B) 6 C) 8

D) 10 E) 12

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

Resolución:

$\overline{9abbb} = 168^{\circ} = \begin{cases} \dot{8} \\ \dot{3} \\ \dot{7} \end{cases}$

$\quad\quad 4\ 2\ 1$

1) Por 8: $4b + 2b + b = \dot{8} \rightarrow 7b = \dot{8} \rightarrow b = \dot{8} = \begin{cases} 0 \\ 8 \end{cases}$

2) Por 3: $9 + a + 3b = \dot{3} \rightarrow a = \dot{3}$

3) Por 7: $\overline{9\ a\ b\ b\ b} = \dot{7}$

$\quad\quad -3\ -1\ 2\ 3\ 1$

$-27 - a + 6b = \dot{7}$

Si $b = 0 \rightarrow -27 - a = \dot{7} \rightarrow a = 1;\ 8$ (No hay sol)

Si $b = 8 \rightarrow 21 - a = \dot{7} \rightarrow a = \dot{7} \rightarrow a = 0$

$\therefore a + b = 8$

23. Al escribir $\left(1^{1999}+2^{1999}+3^{1999}\right)$ en la base once; la cifra de primer orden, es:

A) 0 B) 1 C) 3

D) 4 E) 7

T. de Fermat

Si p es primo y $A \neq \dot{p}$

$\rightarrow \boxed{A^{(p-1)k} \equiv \dot{p}+1}$ $k \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo

Para $p=11$ y $A \neq \dot{11} \rightarrow A^{10k} = \dot{11}+1$

Resolución:

Sea $E = 1^{1999}+2^{1999}+3^{1999} = \ldots r_{(11)} = \dot{11}+r$

Obs $\times\ 1^{1999} = 1 = \dot{11}+1$

$\times\ 2^{1999} = 2^{1990} \times 2^9 = (\dot{11}+1)512 = (\dot{11}+1)(\dot{11}+6)$

$2^{1999} = \dot{11}+6$

$\times\ 3^{1999} = 3^{1990} \times 3^9 = (\dot{11}+1)19683 = (\dot{11}+1)(\dot{11}+4)$

$3^{1999} = \dot{11}+4$

Luego $E = (\dot{11}+1)+(\dot{11}+6)+(\dot{11}+4) = \dot{11}+\dot{11}+\dot{11}$

$E = \dot{11} \rightarrow r = 0$

25. Determine la suma de todos los valores que puede tomar $\overline{ab}$. Si se sabe que $\overline{(ababab7)}^{\overline{ababab}}$ es un número que termina en 9.

A) 2426 B) 2430 C) 2434
D) 2438 E) 2442

$$(\overset{\circ}{10}+7)^{\overline{ababab}} = \overset{\circ}{10}+7^{\overline{ababab}}$$

Resolución:

$$\overline{ababab7}^{\overline{ababab}} = \overset{\circ}{10}+9$$

$$7^{\overline{ababab}} = \overset{\circ}{10}+9$$

R.P. de 7 ; MOD (10)

$7^0 = \overset{\circ}{10}+1$

$7^1 = \overset{\circ}{10}+7$

$\boxed{7^2 = \overset{\circ}{10}+9}$

$7^3 = \overset{\circ}{10}+3$

$7^4 = \overset{\circ}{10}+1$

$6 = 4$

Se cumple

$\overline{ababab} = \overset{\circ}{4}+2$

$\overline{ab} = \overset{\circ}{4}+2$

$\overline{ab} = \underbrace{10; 14; 18; \ldots; 98}_{\#t=23}$

$4 = 2^{2}$

Piden $S = 10+14+18+\ldots+98$

$$S = \left(\frac{10+98}{2}\right)23 = 1242$$

02. Calcule la suma de todos los números de 4 cifras de la sucesión

1; 7; 17; 31; 49; …

A) 235601 B) 224180 C) 223744

D) 225294 E) 225952

$1 + \cancel{6n} - 6 + 2n^2 - \cancel{6n} + 4$

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$23^2 + 24^2 + \cdots + 70^2 = (1^2 + \cdots + 70^2) - (1^2 + \cdots + 22^2)$

Resolución:

Sucesión: 1; 7; 17; 31; 49; ...

6 10 14 18

4 4 4

$a_n = 1 + 6\frac{(n-1)}{1!} + 4\frac{(n-1)(n-2)}{2!} \rightarrow a_n = 2n^2 - 1$

Sea $2n^2 - 1 = \overline{abcd} \rightarrow 1000 \leq 2n^2 - 1 \leq 9999$

$22{,}3 \leq n \leq 70{,}7 \rightarrow n = 23; 24; 25; \ldots; 70$

Piden $S = \sum_{n=23}^{70} (2n^2 - 1) = 2\sum_{n=23}^{70} n^2 - \sum_{n=23}^{70} 1$

$S = 2\left[\frac{70 \cdot 71 \cdot 141}{6} - \frac{22 \cdot 23 \cdot 45}{6}\right] - 48$

$S = 225952$

04. Si

$$\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{cde} \quad y$$

$$\overline{edc}-\overline{cde}=\overline{2pa}$$

Calcule el mayor valor de

$$(a+b+c+e+d+p)$$

A) 44 B) 42 C) 43

D) 46 E) 40

Resolución:

$\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{cde}$ ---(1)

$\overline{edc}-\overline{cde}=\overline{2pa}$ ---(2)

De (1) $d=9$; $c+e=9$; $a-c=c+1$

De (2) $p=9$; $a=7$; $e-c=3$

Y resu $e=6$; $c=3$ Obs $b=0;1;2;\ldots;9$

Piden

$(a+b+c+e+d+p)_{max}=43$

7 9 3 6 9 9

06. Si $CA\overline{(abc)} = \overline{d(b+d)}$ y $\overline{acd} - \overline{bc} = \overline{e(b+1)(b-2)}$, calcule $(a + b) \times (d + c + e)$.

A) 169 B) 224 C) 210

D) 196 E) 182

$CA(\overset{9\ 9\ 10}{\overline{(9)48}}) = \overset{1}{\cancel{0}}52 = 52$

Resolución:

$CA(\overset{9\ 9\ 10}{\overline{a\,b\,c}}) = \overset{1}{\overline{d(b+d)}}$ --- (1)

$\overline{acd} - \overline{bc} = \overline{e(b+1)(b-2)}$ --- (2)

De (1): $a = 9$; $9 - b = d \rightarrow b + d = 9$

$10 - c = b + d \rightarrow c = 1$

De (2)

$\overset{8}{\cancel{9}}\ \overset{10}{1}\ d$ -

$5\ 1$

$e(b+1)(b-2)$

UNID: $d - 1 = b - 2$

DEC: $11 - b = b + 1 \rightarrow b = 5$

CENT $e = 8$

$d = 4$

Piden

$(a+b)(d+c+e) = 14 \cdot 13 = 182$

9 5 4 1 8

08. Al multiplicar $\overline{abcd}$ por $\overline{ef}$ se observa, que la diferencia de los 2 productos parciales es igual a 17 437. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar el producto de los 2 números? Dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 23 B) 24 C) 25

D) 26 E) 27

$$\begin{array}{r|l} 17437 & 7 \\ 2491 & \end{array}$$

Resolución:

Sea $\overline{abcd} \times \overline{ef}$

Dato $e.\overline{abcd} - f.\overline{abcd} = 17437$

$\underbrace{\overline{abcd}}_{2491}\underbrace{(e-f)}_{7} = 17437 \rightarrow \overline{abcd} = 2491$

$e - f = 7$ ✓

Ahs $\overline{ef}_{max} = 92$ ✓

Piden $\overline{abcd} . \overline{ef} = 2491 \times 92$

$= 229172$

$\downarrow$

$\Sigma cifras = 23$

10. Si N es un número de 5 cifras tal que al dividirlo entre 32, se obtuvo 4 restos máximos, calcular la suma de cifras del CA(N), si N es el menor posible.

A) 10 B) 11 C) 12

D) 13 E) 14

Resolución:

mínimo

Sea $N = \overline{abcde}$

$$\begin{array}{r|l} abcde & 32 \\ \hline 32 & 1999 \\ \hline 31c & \\ 28\ 8 & \\ \hline 31d & \\ 28\ 8 & \\ \hline 31e & \\ 28\ 8 & \\ \hline 31 & \end{array}$$

$\rightarrow \overline{ab} = 63$

$\rightarrow c = 9$

$\rightarrow d = 9$

$\rightarrow e = 9$

9 9 9 9 10 1

Luego $N = 63999$

$CA(N) = 36001 \rightarrow \Sigma cifras = 10$

12. La cantidad de términos de la secuencia 26, 48, 70, 92, 114, que sean múltiplos de 23, con 4 cifras en el sistema decimal, es

A) 14 B) 15 C) 16

D) 17 E) 18

Resolución:

$26 ; 48 ; 70 ; 92 ; 114 ; \ldots$

$22 \quad 22 \quad 22 \quad 22$

$a_n = 22n + 4$

Sea $22n + 4 = 23$ --- (1)

$22n + 4 = \overline{abcd}$ --- (2)

De (1) $(23 - 1)n + 4 = 23 \rightarrow 23 + 4 = n$

$n = 23t + 4$

De (2) $1000 \leq 22n + 4 \leq 9999$

$45,2 \leq n \leq 454,3 \rightarrow 45,2 \leq 23t + 4 \leq 454,3$

$1,7 \leq t \leq 19,5 \rightarrow t = \underbrace{2 ; 3 ; 4 ; \ldots ; 19}_{18 \text{ valores}}$

$\therefore$ RPTA: 18

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS